20/11/2019

Άσκηση Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση

Στη συνέχεια να γίνει η LU παραγοντοποίηση του $A' = PA$, να βρεθεί ο αντίστροφος του A' και ο αντίστροφος του A

<u>Λύση</u>

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \underline{3} & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μια θέση μέσα

$$\begin{array}{c|cc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ & \underline{\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \underline{\frac{1}{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$0 \quad -1 \quad 2$ (Λύση 1ου συστήματος)

-1

Απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση.

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$

$\frac{1}{2}x_3 = 0 - \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{cccccc} & & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\left(\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \left(1 - \frac{1}{3}(-1)\right) / \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 2 \right)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = X^T, \quad A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

Στην ουσία μεταθέτει την 1η με την 3η γραμμή

$$= \overset{=L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}} \overset{=U}{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

$$A'X = I \iff LUX = I = \begin{cases} LY = I & (1) \\ LUX = Y & (2) \end{cases}$$

Για το (1)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/3 & 1 & \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, επομένως $$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Για το (2)

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \overset{=Y}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} : \Sigma = X^T \qquad X = X^T = A'^{-1}$$ αφού συμμετρικός

$$A' = PA \iff A'^{-1} = (PA)^{-1} \Rightarrow A'^{-1} = A^{-1}P^{-1} \iff A^{-1} = A'^{-1}P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1η Μέθοδος Νόρμες Διανυσμάτων

Έστω X ένας γραμμικός χώρος στον $\mathbb{R}$ ή στον $\mathbb{C}$ ($X=\mathbb{R}^n$ ή $X=\mathbb{C}^n$). Τότε η απεικόνιση $\|.\|: X\to\mathbb{R}$, $x\to\|x\|$ είναι νόρμα αν ισχύουν τα παρακάτω

(1) $x\in X$, $\|x\|=0 \iff x=0$, (2) $\forall \lambda\in\mathbb{C}, \forall x\in X$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$

(3) $\forall x,y\in X$, $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)

$\|x\|\ge 0$

Έστω $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία διανυσμάτων στον $\mathbb{C}^n$. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο διάνυσμα $x\in\mathbb{C}^n$: $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x \iff \lim\limits_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x\|=0$

ℓ_1: $\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$

$\ell_\infty=\|x\|_\infty=\max\{|x^{(1)}|,\ldots,|x^{(n)}|\}$ (Νόρμα Μεγίστου)

ℓ_2: $\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}$ (Ευκλείδια Νόρμα)

- Απόσταση

Οι τρεις νόρμες είναι υποπεριπτώσεις της ℓ_p: $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$, $p\ge 1$

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|=\|x\|_\infty$

Να βρω την απόδειξη

$\|x\|\ge 0$

$0=\|0\|=\|x-x\|=\|x+(-x)\|\overset{\text{τριγωνική}}{\le}\|x\|+\|-x\|=2\|x\|$

$\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$ Αποδ.

$\|x\|=\|x-y+y\|\le\|x-y\|+\|y\|\Rightarrow\|x\|-\|y\|\le\|x-y\|$

Ομοίως αποδεικνύεται $\|y\|-\|x\|\le\|x-y\|$

$\Rightarrow \big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$

Στον $\mathbb{R}$

Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο $(.,.):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(x,y)\to\mathbb{R}$ ως

$(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$

Στον $\mathbb{C}$

Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο $(.,.):\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, $(x,y)\to\mathbb{C}$ ως:

$(x,y)=\sum_{i=1}^n\overline{x_i}y_i$ (ΠΡΟΣΟΧΗ!)

$(x,x)=\sum_{i=1}^n\overline{x_i}x_i=\sum_{i=1}^n|x_i|^2=\|x\|_2^2$, $x\in\mathbb{C}^n$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz: $|(x,y)| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

γωνία δύο διανυσμάτων $(\widehat{x,y})$ ορίζεται η γωνία τέτοια ώστε

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{(x,y)}{\|x\|_2\,\|y\|_2}.$$

23/11/2019

Νόρμες Διανυσμάτων

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

γενικά $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \ p \ge 1$

Νόρμες πινάκων: Η απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα πίνακα αν ισχύουν

(i) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$.

(iii) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ (τριγωνική)

(iv) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ (πολλαπλασιαστική

$$\|A\| \ge 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \big|\|A\| - \|B\|\big| \le \|A-B\|$$

Φυσικές Νόρμες Πινάκων

Η απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ λέγεται φυσική νόρμα ως προς τη διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ ή νόρμα που παράγεται από την διανυσματική αν

$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ προκύπτει ότι $\|A\| \ge \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Αποδεικνύεται ότι $\|A\| = \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\|}{\|x\|}$

l_1: $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ $\quad l_2$: $\|A\|_2 = \left(\rho\,(A^T A)\right)^{1/2}$

φασματική ακτίνα του A

$\rho(B) = \max\{|\lambda_i| \ B x^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}, \ x^{(i)} \ne 0\}$ δηλ. το μέγιστο των μέτρων των ιδιοτιμών του B

l_∞: $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ $\qquad \|A\| = \|A\|_1$

Ορισμός Δείκτης ή αριθμός κατάστασης ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ είναι η ποσότητα $\kappa(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

$\kappa(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|\geq\|A\cdot A^{-1}\|=\|I\|=1$

Αν ο $\kappa(A)$ είναι πολύ μεγάλος τότε το γρ. σύστημα $Ax=b$ έχει κακή κατάσταση, με την έννοια ότι μικρά σφάλματα στους υπολογισμούς επιφέρουν μεγάλα σφάλματα στη λύση

Δυο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχουν $m,M>0$ τ.ω. $m\|x\|_\alpha\leq\|x\|_\beta\leq M\|x\|_\alpha$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$

Δυο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ πινάκων στον $\mathbb{R}^{n\times n}$ λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχουν $m,M>0$ τ.ω. $m\|A\|_\alpha\leq\|A\|_\beta\leq M\|A\|_\alpha$ $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

Αποδεικνύεται ότι όλες οι διανυσματικές νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες και ότι όλες οι νόρμες πινάκων στον $\mathbb{R}^{n,n}$ είναι ισοδύναμες.

Αποδεικνύεται ότι για τον δείκτη κατάστασης που αντιστοιχεί σε φυσική νόρμα ισχύει $\frac{1}{\kappa(A)}\leq\inf\limits_{\substack{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\\ \det(B)=0}}\frac{\|A-B\|}{\|A\|}$ $\forall \underset{\text{αντιστρ.}}{A\in\mathbb{R}^{n,n}\setminus\{O_{n\times n}\}}$

↑ σχετική απόσταση του A απ' το σύνολο των μη αντιστρέψιμων πινάκων

l_2: Αν $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ τότε $\|A\|_2=(\rho(A^*A))^{1/2}$, $A^*=(\bar{A})^T$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Συνίσταται στην κατασκευή μιας ακολουθίας διανυσμάτων $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ τ.ω. αν συγκλίνει, να συγκλίνει στη λύση x του $Ax=b$

δηλ. $\lim\limits_{m\to+\infty}x^{(m)}=x$

Μέθοδος Jacobi: Για τη λύση γρ. συστήματος $Ax=b$ με $a_{ii} \neq 0$ $\forall i=1,2,\dots$ αναδιατάσσαμε τις εξισώσεις ως εξής $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$ $i=1,2,\dots$

Κατασκευάζουμε την ακολουθία $(x^{(m)})_{m\in N}$ ως
$$x^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right) \quad i=1,2,\dots,n \quad m=0,1,2,$$

Αν η μέθοδος Jacobi συγκλίνει θα συγκλίνει στη λύση του $Ax=b$.
Έστω $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = y$ τότε $y_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}y_j\right) \Leftrightarrow$

$Ay=b$ y η λύση του $Ax=b$

Μέθοδος Gauß-Seidel: $x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right)$ $i=1,2,\dots$ $m=0,1,2$

Να γίνουν 3 επαναλήψεις των μεθόδων Jacobi κ Gauß-Seidel για τη λύση του (Σ): $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ με ακριβής λύση $(1,1,1)$

Jacobi: $x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)})$, $x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}(x_1^{(m)} + x_3^{(m)})$, $x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)})$

$x_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ $x^{(3)} \begin{pmatrix}3/4\\1/2\\3/4\end{pmatrix}$

Gauß-Seidel. $x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)})$
$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}(x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)})$
$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m+1)})$

$x_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $x^{(1)} = \begin{pmatrix}1/2\\1/4\\5/8\end{pmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{pmatrix}5/8\\5/8\\13/16\end{pmatrix}$

$x^{(3)} = \begin{pmatrix}13/16\\13/16\\29/32\end{pmatrix}$